Definição:Define-se o conjunto dos números complexos, e designa-se por $\mathbb{C}$, como o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

com as operações

- **adição**

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- **multiplicação**

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema:O conjunto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dos números complexos com as operações de soma e multiplicação forma um **corpo**.

- Comutatividade da soma e multiplicação

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- Associatividade da soma e multiplicação

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- Existência de elementos neutros da soma e multiplicação

$$z + (0,0) = z, \qquad z\,(1,0) = z$$

- Existência de simétrico

$$(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0,0)$$

- Existência de inverso (para $z = (x,y) \neq (0,0)$)

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

- Propriedade distributiva

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Proposição:Os elementos neutros da soma e multiplicação são únicos, assim como são únicos também o simétrico de cada $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, que se designa por $-z=(-x,-y)$, e o inverso de cada $z=(x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{C}$, que se designa por $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Definição:Definem-se em $\mathbb{C}$ as seguintes operações

- **Subtração**

$$z_1-z_2:=z_1+(-z_2)$$

- **Divisão**

$$\frac{z_1}{z_2}:=z_1z_2^{-1}\qquad(z_2\neq(0,0))$$

- **Potência inteira**

$$z^n:=\underbrace{z\cdots z}_{n\text{ vezes}}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

Proposição:O subconjunto dos complexos

$$\{(x,0) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$$

é **isomorfo** a $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicações usuais. Consequentemente passaremos a identificar o real $x \in \mathbb{R}$ com o complexo $(x,0) \in \mathbb{C}$

$$x \sim (x,0)$$

Definição:Designamos por i o complexo $(0,1)$. Tem-se então

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

e

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

Definição:Dado um número complexo $z = (x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$ definem-se

- **parte real** de z, e designa-se por $\mathrm{Re}(z) = x$.
- **parte imaginária** de z, e designa-se por $\mathrm{Im}(z) = y$.

Coordenadas Polares

Definição:Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ definem-se

- **Módulo** ou **Valor Absoluto** de z, e designa-se por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Argumento** de z ($\neq 0$), ao ângulo (classe de equivalência) formado por z e pelo eixo real

$$\text{Arg}(z) = \theta_z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ (\pm\pi \text{ no } 2^{\text{o}} \text{ e } 3^{\text{o}} \text{ quad}).$$

Chama-se **ramo do argumento** a qualquer escolha única do ângulo numa faixa $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$.
Chama-se **ramo principal do argumento** à escolha única no intervalo $]-\pi, \pi]$.

Chama-se **representação trigonométrica** ou em **coordenadas polares** dum complexo à forma

$$z = |z|\cos\theta_z + i|z|\text{sen}\,\theta_z = |z|(\cos\theta_z + i\,\text{sen}\,\theta_z).$$

Proposição (Fórmula de De Moivre):Dados complexos

$$z = |z|(\cos\theta_z + i\,\mathrm{sen}\,\theta_z) \qquad \text{e} \qquad w = |w|(\cos\theta_w + i\,\mathrm{sen}\,\theta_w),$$

então o produto é dado por

$$zw = |z||w|(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_z + \theta_w)),$$

ou seja,

$$|zw| = |z||w| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w).$$

Analogamente, para o quociente $(w \neq 0)$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w).$$

Da mesma forma

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta_z) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta_z)).$$

Proposição: Dados complexos $z, w \in \mathbb{C}$,

- $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|zw| = |z||w|$
- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ para $w \neq 0$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (**desigualdade triangular**).
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$.
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|$, $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|z| \leq |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$.

Definição:Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ designa-se por **conjugado** de z, e representa-se por $\bar{z}$, o número

$$\bar{z} = x - iy.$$

Proposição:Dados complexos $z, w \in \mathbb{C}$,

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ para $w \neq 0$.
- $\bar{\bar{z}} = z$.
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.
- $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\qquad \text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
- z é real $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- z é imaginário puro $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

Raízes

$$z = \sqrt[n]{w}, \qquad w \neq 0$$

Proposição:Dado $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, então existem n raízes $\sqrt[n]{w}$ distintas, todas com o mesmo valor absoluto e argumentos que distam $2\pi/n$ uns dos outros, dadas em coordenadas polares por

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right)$$

,

$$k = 0, 1, \ldots n - 1.$$